Analiza matematyczna I
Lista 3 (ciągi liczbowe i ich granice)

Zad 1. Znaleźć ogólne wzory podanych ciągów

a) $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{6}, \frac{81}{8}, \frac{243}{10}, ...)$, b) $(0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...)$, c) $(0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{81}, 0, \frac{1}{729}, ...)$,

d) $(1, -4, 9, -16, 0, 25, ...)$, e) $(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{5}{4}}, \sqrt{\frac{6}{5}}, ...)$, f) $(\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, -\frac{7}{9}, \frac{9}{11}, ...)$.

Zad 2. Zbadać, czy następujące ciągi są ograniczone z góry lub z dołu oraz czy są one od pewnego miejsca monotoniczne.

$a_n = n^4 - n$; $b_n = (-1)^n n!$; $c_n = (n^2+1)^3$; $d_n = \frac{1}{n^2-6n+10}$; $e_n = tg(\frac{100\pi}{2n+1})$;

$f_n = \frac{n^2}{2^n}$; $g_n = \frac{2^n}{n!}$; $h_n = n^{(-1)^n}$; $i_n = n^2 - 49n - 50$; $j_n = 3^n + (-2)^n$;

$k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_n = k_{n-2} + k_{n-1}$, dla $n > 2$; $l_1 = \frac{3}{4}$, $l_n = 1 - |1 - 2l_{n-1}|$, dla $n > 1$.

Zad 3. Korzystając z definicji granicy ciągu udowodnić, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{n+1} = -1$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+2008}{3^n} = 1$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n+5} = 0$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = 2$.

Zad 4. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciagów obliczyć granice podanych ciągów

$a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = \frac{n^2-1}{3-n^3}$, $c_n = \frac{(1-2n)^3}{(2n+3)^2(1-7n)}$, $d_n = \frac{2+\sqrt{n}}{1-2n}$, $e_n = \frac{1-2n}{2+\sqrt{n}}$,

$f_n = \sqrt[n]{3} + \sqrt[n+1]{5}$, $g_n = \sqrt[n]{100} + \sqrt[n]{0,001}$, $h_n = \sqrt[n]{2} - \frac{n}{n+1}$, $i_n = \frac{\sqrt[n]{5}(n^2+2)}{n^2}$,

$j_n = 3^n + (-2)^n$, $k_n = \frac{(3-\sqrt{n})^2}{5+4n}$, $l_n = \sqrt[3]{\frac{2n+10}{7-16n}}$, $m_n = \frac{1+2+3+...+n}{(3n-1)^2}$,

$o_n = \frac{1-7\cdot 3^{2n}}{4\cdot 9^n+7}$, $p_n = \frac{3\cdot 2^{2n+1}-8}{4^{n-1}+3}$, $r_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, $s_n = n - \sqrt{n^2+n}$,

$t_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$, $u_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}+1}$, $w_n = \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3^n}}$, $x_n = \frac{\text{arctg}(3n+1)}{\text{arctg}(2n-1)}$

Zad 5. Korzystając z twierdzenia o trzech ciagach wyznaczyć podane granice

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+\sin n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+5n^2+3n^5}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{3^{n+3}+5^n}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n + \frac{3}{4}}$.

Zad 6. Korzystając z definicji liczby Eulera znaleźć podane granice

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\frac{3n+2}{5n+2}\right)^n \cdot \left(\frac{5n+3}{3n+1}\right)^n\right]$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-3}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}$.